

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hai số a, b thỏa các điều kiện: $a^2 + b^2 = 1, a^4 + b^4 = \frac{1}{2}$.

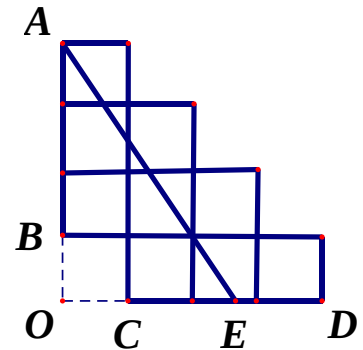
Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2018} + b^{2018}$.

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5-x} + 2\sqrt{3+x} = 6$

Bài 3. (2 điểm)

Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2 . Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE .



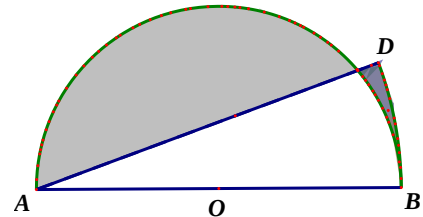
Bài 4. (4 điểm)

- Cho 2 số thực x, y . Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$
- Các số $A; B; C; D; A+C; B+C; A+D; B+D$ là 8 số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 8. Biết A là số lớn nhất trong các số A, B, C, D . Tìm A .

Bài 5. (5 điểm)

- Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 4 \text{ cm}$.

Góc $DAB = 30^\circ$ và cung DB là một phần của đường tròn tâm A . Tính diện tích phân tô đậm.



- Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I . Đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt cạnh BC tại N . Đường thẳng qua I vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M . Chứng minh rằng nếu $AB + CD = 2MN$ thì $ABCD$ là hình thang.

Bài 6. (3 điểm)

Một ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là $v \text{ km/h}$. Nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên, sau khi đi được 120 km với vận tốc v , ô tô tăng tốc thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (3 điểm)

Cho hai số a, b thỏa các điều kiện: $a^2 + b^2 = 1, a^4 + b^4 = \frac{1}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2018} + b^{2018}$

Giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } 2(a^4 + b^4) = (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow (a^2 - b^2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 = \frac{1}{2} \quad (2đ)$$

$$\Rightarrow P = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1009} = \frac{1}{2^{1008}} \quad (1đ)$$

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5-x} + 2\sqrt{3+x} = 6$

Giải.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{5-x}, b = \sqrt{3+x}. \text{ Ta có } a + 2b = 6 \text{ và } a^2 + b^2 = 8 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow 5b^2 - 24b + 28 = 0 \Rightarrow b = 2 \vee b = \frac{14}{5} \quad (1đ)$$

$$\bullet \quad b = 2 \Rightarrow x = 1 \quad (0,5đ)$$

$$\bullet \quad b = \frac{14}{5} \Rightarrow x = \frac{121}{25} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Thử lại ta có 2 nghiệm } 1 \text{ và } \frac{121}{25} \quad (0,5đ)$$

Bài 3. (2 điểm)

Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2 . Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE .

Giải.

$$\text{Độ dài mỗi cạnh hình vuông nhỏ : } 2 \text{ cm}. \quad (0,5đ)$$

$$\text{Diện tích của mỗi phần : } \frac{9 \cdot 4}{2} = 18 \text{ cm}^2. \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích tam giác } AOE : 18 + 4 = 22 \text{ cm}^2. \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow AO \cdot OE = 44 \Rightarrow OE = \frac{44}{8} = 5,5 \text{ cm} \Rightarrow CE = 5,5 - 2 = 3,5 \text{ cm}. \quad (0,5đ)$$

Bài 4. (4 điểm)

1. Cho 2 số thực x, y . Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$

Giải.

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq 2x(1-y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 + x^2y^2 - 2x + 2xy^2 \geq 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2(x+1)^2 \geq 0 \text{ (Đúng với mọi } x, y \text{)}. \quad (1,5đ)$$

2. Các số $A; B; C; D; A + C; B + C; A + D; B + D$ là 8 số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 8. Biết A là số lớn nhất trong các số A, B, C, D . Tìm A .

Giải.

$$\text{Ta có } 3(A + B + C + D) = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36 \Rightarrow A + B + C + D = 12 \quad (1đ)$$

$$\text{Do } B + C + D \geq 1 + 2 + 3 = 6 \text{ nên } A \leq 6. \quad (0,5đ)$$

$$\text{Bằng cách chọn } B = 3, C = 1, D = 2 \text{ ta kết luận } A = 6. \quad (0,5đ)$$

Bài 5. (5 điểm)

1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 4 \text{ cm}$. Góc $DAB = 30^\circ$ và cung DB là một phần của đường tròn tâm A . Tính diện tích phần tô đậm.

Giải.

Gọi E là giao điểm của AD và (O) . Bán kính đường tròn (O) : $R = 2 \text{ cm}$.

$$\text{Ta có diện tích tam giác } AOE : \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Diện tích hình quạt cung } BE : \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6} \quad (0,5đ)$$

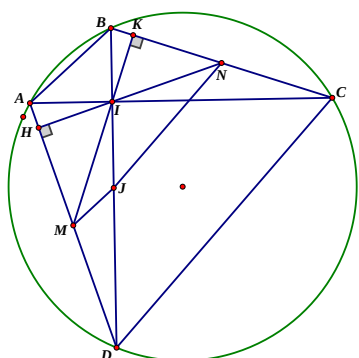
$$\text{Diện tích hình quạt cung } BD : \frac{\pi (2R)^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi R^2}{3} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Diện tích nửa hình tròn: } \frac{\pi R^2}{2} \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích phần tô đậm: } & \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{3} - 2 \left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^2}{6} \right) \\ &= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2(\pi - \sqrt{3})}{2} \approx 2,82 \text{ cm}^2 \quad (0,5đ) \end{aligned}$$

2. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I . Đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt cạnh BC tại N . Đường thẳng qua I vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M . Chứng minh rằng nếu $AB + CD = 2MN$ thì $ABCD$ là hình thang.

Giải.



$$\text{Ta có } BIK = BCI \Rightarrow MID = MDI \Rightarrow MD = MI \quad (1) \quad (0,25đ)$$

$$CIK = CBI \Rightarrow MIA = MAI \Rightarrow MA = MI \quad (2) \quad (0,25đ)$$

$$\text{Từ (1), (2) } \Rightarrow MA = MD \quad (0,25đ)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } NB = NC \quad (0,25đ)$$

Gọi J là trung điểm của BD .

$$AB + CD = 2MN \Rightarrow 2MJ + 2NJ = 2MN \Rightarrow MJ + NJ = MN \quad (1đ)$$

$$\text{Suy ra } M, J, N \text{ thẳng hàng } \Rightarrow AB \parallel CD \quad (0,5đ)$$

Bài 6. (3 điểm)

Một ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là $v \text{ km/h}$.

Nếu vận tốc ô tô đó tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên, sau khi đi được 120 km với vận tốc v , ô tô tăng tốc thêm 25% và đến B sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

Giải.

Vận tốc tăng thêm 20% tức gấp $\frac{6}{5}$ vận tốc dự định nên thời gian đi được bằng $\frac{5}{6}$ thời gian dự định. (0,5đ)

Do đó $\frac{1}{6}$ thời gian dự định là 1 giờ, suy ra thời gian dự định là 6 giờ. (0,5đ)

Vận tốc tăng thêm 25% tức gấp $\frac{5}{4}$ vận tốc dự định nên thời gian đi quãng đường sau bằng $\frac{4}{5}$ thời gian dự định đi trong quãng đường sau. (0,5đ)

Do đó $\frac{1}{5}$ thời gian dự định đi trong quãng đường sau là 48 phút, suy ra thời gian dự định đi quãng đường sau là 4 giờ. (0,5đ)

Vì thế thời gian đi trong 120 km là 2 giờ. Vậy vận tốc dự định là 60 km/h . (0,5đ)

Quãng đường giữa 2 thành phố là 60 $\text{km/h} \times 6 \text{ h} = 360 \text{ km}$. (0,5đ)